47 Soit un entier $n \geq 4$. On se propose d'étudier les solutions entières de l'équation $(E) : x^2 + 9 = 2^n$.

On suppose que (E) possède une solution entière notée a.

1. Montrer que $a \equiv 1 \pmod 2$.
2. En déduire que $a^2 + 9 \equiv 2 \pmod 4$.
3. Montrer que (E) n'admet pas de solution.

48 Soit un entier n impair.

On se propose d'étudier les solutions entières de l'équation $(E) : x^2 + 9 = 3^n$.

On suppose que (E) possède une solution entière notée a.

1. Montrer que $a \equiv 0 \pmod 2$.
2. En déduire que $a^2 + 9 \equiv 1 \pmod 4$.
3. Montrer que $3^n \equiv 3 \pmod 4$.
4. En déduire que (E) n'admet pas de solution.

49 Les nombres de Fermat sont définis par $F_n = 2^{(2^n)} + 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Fermat pensait qu' ils étaient tous premiers. En fait les cinq premiers $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ et $F_4 = 65537$ sont premiers et le sixième F_5 ne l'est pas.

On va montrer sans calculer explicitement F_5, que 641 divise F_5.

1. Vérifier les égalités $641 = 5 \times 2^7 + 1 = 5^4 + 2^4$.
2. Montrer que $5 \times 2^7 \equiv -1 \pmod{641}$,
$5^4 \times 2^{28} \equiv 1 \pmod{641}$ et $5^4 \equiv -2^4 \pmod{641}$.
3. En déduire que 641 divise $2^{32} + 1 = F_5$.

50 Soit n un entier. On désigne par $f(n)$ la somme des chiffres de n.

1. Montrer que $n \equiv f(n) \pmod 9$.

On pose $N = 4444^{4444}$.

2. a. Montrer que $4444 \equiv 7 \pmod 9$.
b. Ecrire la division euclidienne de 4444 par 3.
c. En déduire que $4444^{4444} \equiv 7 \pmod 9$
d. Montrer que $f(f(N)) \equiv 7 \pmod 9$.
3. a. Vérifier que $N < \left(10^4\right)^{5.10^3}$,
en déduire que $N \leq 10^{20000}$ puis que $f(N) \leq 180000$.
b. Montrer que $f(f(N)) \leq 54$.
4. Montrer que $f(f(f(N))) = 7$.